

PACS numbers: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Tp

Em uma tentativa de explicar a aceleração de raios cósmicos, Enrico Fermi [1] propôs um modelo no qual partículas carregadas poderiam ser aceleradas a partir de colisões com estruturas magnéticas em movimento pelo espaço inter-estelar. Desde então várias versões para o modelo vem sendo propostas [2–7].

Um das versões mais estudadas é o Modelo Fermi-Ulam. O modelo é descrito como sendo uma partícula clássica confinada entre duas paredes rígidas, estando uma delas fixa e a outra movendo-se periodicamente com o tempo. Para a versão conservativa assumimos que todas as colisões com ambas paredes são completamente elásticas. O espaço de fases apresenta uma estrutura mista, ou seja, dependendo da combinação dos parâmetros de controle e das condições iniciais podem ser observados mares de caos, curvas invariantes *spanning* e ilhas Kolmogorov-Arnol'd-Moser (KAM). É importante enfatizar que a presença das curvas *spanning* limita o ganho de energia da partícula no mar caótico. Observamos que a introdução de dissipação provoca uma drástica mudança na dinâmica do problema, como o fato de que o modelo passa a não preservar área do espaço de fase. Pode-se então observar a existência de atratores caóticos [8], e em especial eventos de crises [9].

Consideraremos, nesse trabalho, a versão dissipativa do Modelo Fermi-Ulam no qual uma partícula clássica de massa  $m$  está confinada entre duas paredes rígidas, estando uma delas fixa e a outra movendo-se periodicamente no tempo. Assumiremos que a partícula sofre colisões inelásticas com ambas paredes. Para a parede fixa, introduziremos um coeficiente  $\alpha \in [0, 1]$ , enquanto que para a parede móvel consideraremos  $\beta \in [0, 1]$ . No limite quando  $\alpha = \beta = 1$  recupera-se todos os resultados do caso conservativo. Para  $\alpha = 0$ , o que corresponde a uma colisão completamente inelástica tem-se que uma única colisão é suficiente para terminar toda a dinâmica do sistema. Por outro lado, se  $\beta = 0$ , equivale a partícula sofrer uma colisão completamente inelástica com a parede móvel e esta re-lançar a partícula no sistema com velocidade igual a velocidade máxima da parede móvel. A dinâmica deste modelo é descrita através de um mapa bidimensional com três parâmetros de controle. Mostraremos que a introdução de dissipação destrói a estrutura do espaço de fase incluindo a ocorrência de eventos de crises.

Começaremos descrevendo o modelo e os procedimentos necessários para a construção do mapa. O modelo consiste basicamente de uma partícula confinada entre duas paredes rígidas. Uma delas está fixa em  $x = l$  enquanto a outra move-se periodicamente de acordo com a equação  $x_w(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$  onde  $\varepsilon$  corresponde à amplitude de oscilação e  $\omega$  é a frequência da parede móvel. O movimento da partícula não sofre influência de qualquer campo externo. Assumiremos que as colisões com ambas paredes são inelásticas. Os coeficientes de restituição, tanto da parede móvel ( $\beta$ ) quanto da parede fixa ( $\alpha$ ) pertencem ao intervalo  $(0, 1)$ .

A dinâmica do modelo é descrita em termos de um mapa bidimensional não linear nas variáveis velocidade e tempo. Para a construção desse mapa é conveniente usarmos variáveis adimensionais. Para tanto, temos que o tempo é medido em termos do número de oscilações da parede móvel ou seja,  $\phi_n = \omega t_n$ . Definimos também a velocidade como sendo  $V_n = v_n/(\omega l)$  e  $\epsilon = \varepsilon/l$ . Começaremos o estudo da dinâmica considerando uma condição inicial  $(V_n, \phi_n)$  com posição da partícula dada por  $x_p(\phi_n) = \epsilon \cos(\phi_n)$ . Portanto temos que a dinâmica é dada por um mapa  $T$  tal que  $T(V_n, \phi_n) = (V_{n+1}, \phi_{n+1})$ . O mapa é escrito como sendo

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - (1 + \beta)\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta T_n \mod(2\pi) \end{cases}, \quad (1)$$

onde as expressões correspondentes para ambos  $V_n^*$  e  $\Delta T_n$  dependem de qual tipo de colisão ocorre, isto é : (i) colisões sucessivas e ; (ii) colisões não sucessivas. Para o caso de colisões sucessivas, após a partícula entrar na zona de colisão,  $x \in [-\epsilon, \epsilon]$  e sofrer uma colisão com a parede em movimento, a partícula pode vir a sofrer uma segunda e então sucessiva colisão. Neste caso as expressões para  $V_n^*$  e  $\Delta T_n$  são dadas por  $V_n^* = -\beta V_n$  and  $\Delta T_n = \phi_c$ . O valor de  $\phi_c$  é obtido numericamente como solução da equação  $G(\phi_c) = 0$  com  $\phi_c \in (0, 2\pi]$ . A função  $G(\phi_c)$  é obtida apartir da condição de que a posição da partícula seja a mesma posição da parede em movimento. A equação  $G(\phi_c)$  é escrita como sendo:

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c. \quad (2)$$

entretanto se a função  $G(\phi_c)$  não tem raiz no intervalo  $\phi_c \in (0, 2\pi]$ , concluímos que a partícula deixa a zona de colisão sem sofrer uma sucessiva colisão. Para o caso de colisões sucessivas, temos que o determinante da Matriz Jacobiana é dado por

$$\det(J) = \beta^2 \left[ \frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right]. \quad (3)$$

Podemos observar claramente que somente para o caso limite  $\beta = 1$ , o mapa preserva área no espaço de fases. Agora consideraremos o caso de colisões não sucessivas. Neste caso, as expressões para  $V_n^*$  e  $\Delta T_n$  são  $V_n^* = \beta \alpha V_n$  e  $\Delta T_n = \phi_r + \phi_l + \phi_c$ , onde os termos auxiliares são  $\phi_r = \frac{1 - \epsilon \cos(\phi_n)}{V_n}$  e  $\phi_l = \frac{1 - \epsilon}{\alpha V_n}$ . A expressão de  $\phi_r$  corresponde ao tempo de viagem gasto pela partícula até a parede fixa e após sofrer uma colisão com esta a partícula é refletida com velocidade  $\alpha V_n$ . Então, o termo  $\phi_l$  denota o tempo gasto pela partícula até entrar novamente na zona de colisão. Finalmente,  $\phi_c$  é numericamente obtido como solução da equação  $F(\phi_c) = 0$  com  $F(\phi_c)$  dado por

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_r + \phi_l + \phi_c) - \epsilon + \alpha V_n \phi_c. \quad (4)$$

A equação acima é obtida da condição de igualdade da posição da partícula e da parede móvel. A fase  $\phi_c$  deve pertencer ao intervalo  $\phi_c \in [0, 2\pi]$ . Para colisões não sucessivas temos que o determinante da Matriz Jacobiana é dado por

$$\det(J) = \alpha^2 \beta^2 \left[ \frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right]. \quad (5)$$

Neste caso o modelo preserva área somente no limite  $\alpha = \beta = 1$ .

Para descrever a ocorrência de eventos de crise, devemos conhecer exatamente a localização dos pontos de sela. Assim, para obter a localização dos pontos fixos (sela, nó, etc), devemos resolver as equações  $V_{n+1} = V_n$  e  $\phi_{n+1} = \phi_n$ . A solução dessas equações nos fornece que

$$V = \left[ \frac{1 + \beta}{\beta \alpha - 1} \right] \epsilon \sin(\phi), \quad (6)$$

$$\phi = \pm \arccos \left[ \frac{\epsilon \pm \gamma \sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2 - 1}}{\epsilon^2 + \gamma^2} \right], \quad (7)$$

onde o termo auxiliar  $\gamma$  é definido como sendo

$$\gamma = \frac{2\epsilon \alpha m \pi}{\alpha + 1} \left[ \frac{1 + \beta}{\beta \alpha - 1} \right], \quad (8)$$

e  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Assim, para  $m = 1$ , um ponto de sela é dado por

$$V = \left[ \frac{1 + \beta}{\beta \alpha - 1} \right] \epsilon \sin(\phi), \quad (9)$$

$$\phi = - \arccos \left[ \frac{\epsilon - \gamma \sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2 - 1}}{\epsilon^2 + \gamma^2} \right]. \quad (10)$$

Sabemos que, para um ponto fixo do tipo sela existem dois tipos de variedades: (a) estáveis e, (b) instáveis. As variedades instáveis são obtidas a partir da iteração do mapa  $T$  com condições iniciais apropriadas. Por outro lado, a construção das variedades estáveis é um pouco mais complicado visto que precisamos obter a inversa de  $T$ . Felizmente, o mapa que descreve a dinâmica do Modelo Fermi-Ulam é bastante simples de modo que podemos obter a inversa de  $T$ , a qual chamaremos de  $T^{-1}$ . Portanto temos que  $T^{-1}(V_{n+1}, \phi_{n+1}) = (V_n, \phi_n)$  e, conseqüentemente a expressão para a velocidade é dada por

$$V_n = \frac{1}{\beta \alpha} [V_{n+1} + (1 + \beta) \epsilon \sin(\phi_{n+1})]. \quad (11)$$

Por outro lado a fase  $\phi_n$  é obtida a partir da condição  $h(\phi_n) = 0$ , onde  $h(\phi_n)$  é escrita como sendo

$$h(\phi_n) = [V_{n+1} + (1 + \beta) \epsilon \sin(\phi_{n+1})](\phi_n - \phi_{n+1}) + \beta(1 + \alpha) - \beta \alpha \epsilon \cos(\phi_n) - \beta \epsilon \cos(\phi_{n+1}). \quad (12)$$

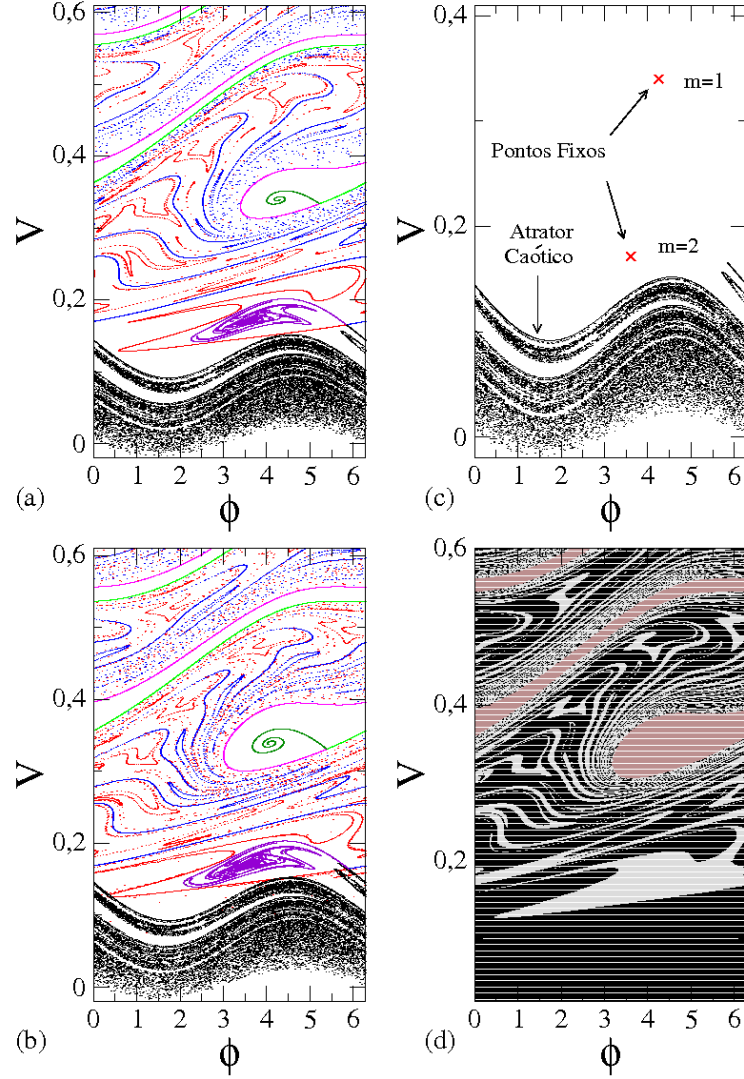


FIG. 1: Variedades Estáveis e Instáveis para um ponto de sela considerando  $m = 1$  e  $m = 2$ . Os parâmetros de controle utilizados foram  $\epsilon = 0.02$ ,  $\beta = 1$  e: (a)  $\alpha = 0.8947$  (imediatamente antes da crise); (b)  $\alpha = 0.905$  (imediatamente após a crise); (c) Pontos fixos atrativos para  $m = 1$  e  $m = 2$  e um atrator caótico; (d) Suas correspondentes bacias de atração. A região em preto corresponde à bacia de atração do atrator caótico; a de cor cinza é a bacia de atração para o ponto fixo de  $m = 2$ ; finalmente a região marrom corresponde à bacia de atração do ponto fixo  $m = 1$ .

A equação (12) é resolvida numericamente através do método de Newton.

Nesta seção discutiremos nossos resultados numéricos. Concentraremos-nos na caracterização dos eventos de crises de fronteira.

Podemos ver na Fig 1 o comportamento das variedades estáveis e instáveis para um ponto fixo do tipo sela dados pelas Eqs. (9) e (10). Vemos que os dois ramos das variedades instáveis evoluem de modo que uma delas gera o ponto fixo atrativo enquanto o outro gera o atrator caótico. Por outro lado, os dois ramos da variedade estável (obtidos a partir de  $T^{-1}$ ) geram as fronteiras das bacias de atração tanto para o atrator caótico quanto para o ponto fixo atrativo. Se incrementarmos o valor do parâmetro  $\alpha$ , que é equivalente a reduzir a força da dissipação, os dois ramos da variedade estável que estabelecem os limites das fronteiras das bacias colidem com as bordas do seu atrator caótico. Essa colisão implica na súbita destruição do atrator caótico e também de sua bacia de atração. Este evento recebe o nome de crise de fronteira [10, 11].

Antes do evento de crise existem dois tipos de atratores, isto é: (i) dois pontos fixos atrativos e, (ii) um atrator caótico, como podem ser vistos na Fig 1(c). Assim como podemos esperar, deve haver três diferentes bacias de atração, como é mostrado na Fig 1(d).

Como uma breve conclusão, neste trabalho estudamos o modelo dissipativo do acelerador de Fermi. Obtivemos o mapa que descreve sua dinâmica juntamente com sua inversa. Mostramos que o modelo preserva área do espaço de fase somente para o caso em que  $\alpha = \beta = 1$ . Obtivemos um cruzamento homoclínico e caracterizamos um evento de crise. Finalmente, mostramos que a introdução de dissipação provoca uma drástica consequência para o modelo. Além do modelo não preservar área como no caso conservativo, observamos uma abrupta destruição do atrator caótico. Mostramos, ainda, que essa destruição é causada por a um evento de crise de fronteira.

- 
- [1] Fermi, E. "On the Origin of the Cosmic Radiation," Phys. Rev. 75, 1169, 1949.
  - [2] Ladeira, D. G.; da Silva, J. K. L. "Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model," 73, 026201, 2006.
  - [3] Everson, R. M. "Chaotic dynamics of a bouncing ball," Physica D 19, 355, 1986.
  - [4] Leonel, E. D.; da Silva J. K. L.; Kamphorst, S. O. "On the dynamical properties of a Fermi accelerator model," Physica A 331, 435, 2004.
  - [5] Leonel, E. D.; McClintock, P. V. E.; da Silva, J. K. L. "Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis," Phys. Rev. Lett. 93, 014101, 2004.
  - [6] Lichtenberg, A. J. ; Lieberman, M.A. ; Cohen, R. H. "Fermi acceleration revisited," Physica D 1, 291, 1980.
  - [7] Leonel, E. D.; McClintock, P. V. E. "A hybrid FermiUlam-bouncer model," J. Phys. A 38, 823, 2005.
  - [8] Lieberman, M. A.; Tsang, K. Y. "Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems," Phys. Rev. Lett. 55, 908, 1985.
  - [9] Leonel, E. D.; McClintock, P. V. E. "A crisis in the dissipative Fermi accelerator model," J. Phys. A 38, L425, 2005.
  - [10] Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. "Chaotic Attractors in Crisis," Phys. Rev. Lett. 48, 1507, 1982.
  - [11] Grebogi, C.; Ott, E.; Yorke, J. A. "Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos," Physica D 7, 181, 1983.